Bellavista, 17 de octubre, 2022

Señor(a):

**RESOLUCIÓN DECANAL N° 123-2022-D-FCNM**. - Bellavista 17 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el OFICIO Nº 01-2022-JET-EPM-FCNM, recibido en forma virtual el 06 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARACIONALES" presentado por el Sr. Bachiller LOZANO CERNA ALEXANDER MANUEL, ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

**CONSIDERANDO**:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, de fecha el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, **Asesores**, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante RESOLUCIÓN DECANAL Nº 082-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022 se Designó, Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES", presentado por el Bachiller LOZANO CERNA, Alexander Manuel; Jurado que está integrado por los siguientes profesores: Dr. JULIO CÉSAR NÚÑEZ VILLA (Presidente), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Vocal), Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA (Secretario), Lic. GABRIEL RODRÍGUEZ VARILLAS (Suplente);

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Que, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 06 de octubre de 2022, el Dictamen del proyecto de Tesis titulado: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA

ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARACIONALES." presentado por el Sr. Bachiller LOZANO CERNA ALEXANDER MANUEL, el cual, ha sido evaluado en su forma y fondo, dictaminando su aprobación;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

**RESUELVE:**

**1º. APROBAR**, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: "**EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARACIONALES**", presentado por el Sr. Bachiller LOZANO CERNA ALEXANDER MANUEL, en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao.

**2º. AUTORIZAR**, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

**3º. TRANSCRIBIR**, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesado, para conocimiento y fines.

**REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE**

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez**
**Decano**

**PROVEÍDO N°616-2022-D-FCNM**

**Ref. :** **OFICIO N° 01-2022-JET-EPM-FCNM**
**DICTAMEN N° 01-2022-JET-FCNM**
**Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis**
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
**Bach. LOZANO CERNA, Alexander Manuel**
Escuela Profesional de Matemática

---

**DERÍVESE**, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez**
**Decano**

JAMV/hc
Archivo

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

## JURADO EVALUADOR DE TESIS

(R. D. Nº 082-2022-D-FCNM)

---

Lima, 06 octubre 2022

**OFICIO Nº 01-2022-JET-EPM-FCNM**

Señor

Dr. Juan A. Méndez Velásquez

Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Presente.-

De mi consideración:

Tengo el agrado de dirigirme a usted para expresarle un cordial saludo y en atención al Memorando Nº 048-2022-D-FCNM, remitir a su despacho el expediente con el Dictamen del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis titulada: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES" presentado por el bachiller Lozano Cerna Alexander Manuel.

Atentamente,

…………………………………………..

Dr Julio César Nuñez Villa

Presidente de Jurado Evaluador de Tesis

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

06 de octubre 2022

**DICTAMEN N°01-2022- JET-FCNM**

El Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARACIONALES" presentado por el bachiller Lozano Cerna Alexander Manuel, designado con Resolución Decanal Nº 082-2022-D-FCNM, reunido en sesión virtual ordinaria del día miércoles 05 de octubre a las 21: 20 hrs., revisan cuidadosamente el Proyecto de Tesis presentado, en forma y fondo; por lo que el Jurado de Proyecto de Tesis toman el siguiente

**ACUERDO**:

1 º **Aprobar** el proyecto de tesis titulado: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARACIONALES" presentado por el bachiller Lozano Cerna Alexander Manuel.

2º Remitir al Señor Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática el presente dictamen, acompañado la versión virtual del expediente respectivo para que, según lo dispuesto por el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, se continúe con el trámite.

| | | |
|---|---|---|
| ……………………………… | ……………………………… | ……………………………… |
| Dr. Julio César Nuñez Villa | Dr. Edinson Montoro Alegre | Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega |
| Evaluador de Tesis | Jurado Evaluador de Tesis | Jurado Evaluador de Tesis |
| PRESIDENTE | VOCAL | SECRETARIO |

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas

Jurado Evaluador de Tesis

SUPLENTE

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**
**JURADO EVALUADOR DE TESIS**

CITACION N° 001-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis
Presente.-

A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 21:20
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

- ✓ Expediente de tesis "Existencia De Soluciones Débiles Positivas Para Una Ecuación Elíptica De Tipo P-Kirchhoff Mediante Métodos Variacionales" del Bachiller Lozano Cerna Alexander Manuel.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 082-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**
**JURADO EVALUADOR DE TESIS**

CITACION N° 001-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Presente.-

A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 21:20
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

- ✓ Expediente de tesis "Existencia De Soluciones Débiles Positivas Para Una Ecuación Elíptica De Tipo P-Kirchhoff Mediante Métodos Variacionales" del Bachiller Lozano Cerna Alexander Manuel.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 082-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**
**JURADO EVALUADOR DE TESIS**

ASISTENCIA
(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 001-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**
**JURADO EVALUADOR DE TESIS**

CARGO
(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 001-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

# EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES

**Autor:**
Alexander Manuel Lozano Cerna

**Asesor:**
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

**Línea de inverstigación:**
Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales

Callao, 2022

**PERÚ**

Alexander Manuel Lozano Cerna
Bachiller

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Asesor

# INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES
4. **Autor:** Bach. Alexander Manuel Lozano Cerna
   ORCID: 0000-0003-0537-9534
5. **Asesor:** Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
   ORCID: 0000-0002-8941-4394
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidad de análisis:** Ecuación elíptica de tipo $P$-kirchhoff
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática pura)

# Índice

# INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales EDP's son de gran utilidad en Matemática y ciencias aplicadas pues permiten representar muchos fenómenos físicos mediante modelos de evolución, estos describen la dinámica que las gobierna en función de espacio y tiempo. Entre las EDP's más importantes tenemos, la ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff que matemáticamente modela la difusión de fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción. Su espectro de estudio es amplio, desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones.

En 1883 aparece por primera vez en el trabajo de Kirchhoff la siguiente ecuación

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\| dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

la cual es conocida como la ecuación hiperbólica de Kirchhoff. Esta ecuación extiende la clásica ecuación de onda de D'Alambert, considerando los efectos del cambio en la longitud de la cuerda durante las vibraciones.

Los parámetros en la ecuación (1) tienen los siguientes significados: $L$ es el cambio de longitud en la cuerda, $h$ es el área de su sección transversal, $E$ es el módulo de Young del material del cual esté hecha la cuerda, $\rho$ es la densidad de la masa y $P_0$ es la tensión inicial.

Posteriormente se generaría una versión estacionaria de la ecuación (1) conocida actualmente como la ecuación elíptica de Kirchhoff:

$$\left|\begin{array}{c} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2}$$

donde $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2$ es la norma en $H_0^1(\Omega)$.

En este trabajo se considerará el siguiente problema elíptico

$$\left|\begin{array}{c} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, bien regular de clase $C^1$, $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory y $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface las condiciones que se indicará a posteriori, $\Delta_p u$ es el operador $p$-Lapaciano y $\|\cdot\|$ es la norma usual en $W_0^{1,p}(\Omega)$. El problema anterior es denominado "p-Kirchhoff" y viene a ser la generalización de (2).

Muchas EDP's presentan dificultades para poder determinar sus soluciones explícitas, y en los casos que se obtengan implícitamente no existe garantía de que sean acotadas o únicas siendo estas características muy importantes en el sentido físico real, por ello el objetivo de este trabajo de tesis es investigar la existencia de soluciones positivas para la clase de problemas de valores en la frontera no local de tipo $P$-Kirchhoff, y para ello empelaremos uno de los métodos variacionales como es el teorema del paso de la montaña.

# I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1. Descripción de la realidad problemática

Consideremos el problema de valores en la frontera no local de tipo $P$-Kirchhoff descritos de manera general como sigue

$$(P): \left| \begin{array}{c} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, bien regular de clase $C^1$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory y $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface las condiciones $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$, $\Delta_p u$ es el operador $p$-Lapaciano, tal que

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \ , \ 1 < p < n$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

Aquí asumiremos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que satisface las condiciones de crecimiento subcrítico.

$$|f(x,t)| \leq c\,|t|^{q-1} \ , \ \forall x \in \Omega \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } c > 0 \tag{1.1}$$

donde $p < q < p' = \dfrac{p.n}{n-p}$.

Es así que en el presente trabajo demostraremos la existencia de soluciones positivas en el sentido débil para el problema $(P)$ mediante el uso de métodos variacionales, en particular el uso del método del paso de la montaña.

## 1.2. Formulación del Problema

### 1.2.1. Problema General

¿De qué forma se puede demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff?

### 1.2.2. Problemas Específicos

1. ¿Cuál debería ser el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff?
2. ¿Qué condiciones se debe establecer a las fuerzas internas $f$ y el operador $M$ de Kirchhoff, para que una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas?

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo General

Demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff mediante los métodos variacionales.

### 1.3.2. Objetivos Específicos

1. Establecer el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff.
2. Establecer las condiciones adecuadas sobre las fuerzas internas $f$ y el operador $M$ de Kirchhoff para que una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas.

## 1.4. Justificación

El propósito de este trabajo es investigar la existencia de soluciones positivas para una clase de problemas de valores límites no locales de tipo $P$-Kirchhoff, debido a que representan una variedad relevante de situaciones físicas aplicadas en las ingenierías. Además se tiene la presencia del operador $P$-Laplaciano que aparece en varias áreas de la ciencia como Astronomía, Climatología, Fluidos no newtonianos, extracción de petróleo, etc. Por ejemplo, en el estudio de sensibilidad de un modelo estacionario que aparece en Climatología con relación a la variación de la constante solar, en problemas de reacción-difusión, como también en flujos en medios porosos.

En particular, los sistemas elípticos no locales como el que se plantea en este trabajo, modelan difusión de especies o fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción. Su espectro de estudio es amplio: desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones. Para un mejor entendimiento se puede ver el artículo referencia Alves et al. (2005).

En esta última década el estudio de los sistemas elípticos no locales del tipo Kirchhoff ha cobrado particular interés, sobre todo después del trabajo de Lions (1969), debido a que son modelos que representan una gran variedad de situaciones físicas en Ciencias e Ingeniería y requiere herramientas nada triviales para resolverlos. En este trabajo, utilizamos un acercamiento a los explorados en los artículos Alves et al. (2005), Corrêa and Figueiredo (2006) y Chabrowski and Yang (1997).

En este sentido los modelos, que incluyen operadores no locales del tipo Kirchhoff, han sido recientemente considerados por diversos investigadores. Se espera con este estudio permitir entender y explicar la metodología usada por los autores en la resolución de estos problemas, sirviendo como base de apoyo para el avance matemático en la comunidad científica de nuestro país.

## 1.5. Delimitantes de la Investigación

### 1.5.1. Teórico

No se aplica en este tipo de proyecto.

### 1.5.2. Temporal

No se aplica en este tipo de proyecto.

### 1.5.3. Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto.

# II. MARCO TEÓRICO

## 2.1. Antecedentes

### 2.1.1. Internacionales

F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo (2006), **On an Elliptic Equation of $p$-Kirchhoff Type via Variational Methods.** Estudian el siguiente problema

$$\left| \begin{array}{ll} -\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Prueba la existencia de una solución positiva utilizando métodos variacionales, como es el teorema del paso de la montaña.

F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo (2006), **On the Existence of Positive Solution for an Elliptic Equation of Kirchhooff Type via Moser Iteration Method.** Estudian el siguiente problema:

$$\left| \begin{array}{ll} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = f(\lambda,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Investigando la existencia y positividad de la solución para el problema elíptico no lineal. Con la intención de resolver dicho problema primero se considera un problema truncado que involucra solamente un exponente subcrítico de Sobolev y muestra que la solución positiva del problema truncado es una solución positiva del problema principal.

T. F. Ma (2005), **Remarks on an Elliptic Equation of Kirchhoff Type.** Estudia el siguiente problema

$$\left| \begin{array}{ll} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde prueba la existencia de la solución positiva. Resaltamos el uso de una inmersión de Sobolev que es la que aplicamos en nuestra investigación. El problema modela las oscilaciones no lineales de los materiales viscoelásticos.

C.O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma (2005), **Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type.** Estudian el siguiente problema:

$$\begin{array}{cl} M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}$$

donde prueba la existencia de una solución positiva. Para ello el desarrollo lo divide en dos partes, en la primera considera la ecuación $-M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = u^p$ y muestra la existencia de soluciones positivas; en la segunda parte, establece una formulación variacional del problema para finalmente presentar el resultado principal.

### 2.1.2. Nacionales

Yony Raúl Santaria Leuyacc (2017), **Nonlinear elliptic Equations with Maximal Growth Range.** Estudia el siguiente problema:

$$\left|\begin{array}{ll} -\delta u = f(u), & x \in \Omega \\ u \in W_0^1 L^{2,r}(\Omega), & 1 < r \leq 2, \end{array}\right.$$

Donde prueba la existencia de soluciones débiles no triviales, para estudiar la solubilidad utiliza un enfoque variacional, específicamente el teorema del paso de la montaña junto con desigualdades de tipo Trudinger-Moser.

Eugenio Cabanillas Lapa, Willy Barahona Martínez, Rocío De La Cruz Marcacuzco, Gabriel Rodríguez Varillas y Luis Macha Collotupa (2014), **Sobre una Ecuación Elíptica del Tipo $p(x)$-Kirchhoff con Término Fuente no Local.** Estudian el siguiente problema:

$$\left|\begin{array}{ll} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + \lambda \displaystyle\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Donde prueba la existencia de la solución débil utilizando el método de Galerkin, el teorema del punto fijo en dimensión finita y la teoría de los espacios de Sobolev.

Teófanes Quispe Méndez, Yolanda Santiago Ayala y Félix Pariona Vilca (2013), **Existencia Local y no Existencia Global para un Sistema de Ecuaciones de Onda no Lineal con Operador $p$-Laplaciano.** Estudian el siguiente problema con condiciones

$$\left|\begin{array}{ll} u'' - \Delta_p u - \Delta u' = f_1(u,v) & \text{en } \Omega\times]0,\infty[ \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times]0,\infty[ \end{array}\right.$$

Donde prueba la existencia de una solución local utilizando el método de Faedo-Galerkin, posteriormente obtuvo la explosión de soluciones en tiempo finito, con energía inicial negativa, nula y positiva restringida empleando el método directo desarrollado por Li and Tsai (2003)

## 2.2. Bases Teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar el contenido teórico necesario para la resolución de la presente tesis. Para esto seguiremos los resultados mostrados en (Brézis, 1984), (Kreyszig, 1978), (Adams, 1975), (Munkres, 2002), (Kesavan, 1989), (M. M. Cavalcanti - V. N. Domingos Cavalcanti, 2009), (Rayden, 1988), (Evans, 1998), (Zygmund, 1977).

### 2.2.1. Espacios $L^p(\Omega)$

Empecemos recordando las definiciones básicas y algunos resultados muy útiles de la teoría de integración.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

**Definición 2.2.1.** Una función $\varphi$ es llamada *función escalonada* si $\phi$ tiene una representación de la forma $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, donde cada $A_i$ es un conjunto que tiene medida finita, esto quiere decir que $\mu(A_i) < \infty$.

**Definición 2.2.2.** Una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función superior* si existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones escalonadas tal que:

*i)* $\varphi_n \to f$ en c.t.p. y,

*ii)* $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n < \infty$

Al conjunto de todas las funciones superiores se le denotará por $U(\Omega)$.

**Definición 2.2.3.** El espacio de las funciones integrables según Lebesgue se denotará por

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} / f = u - v \,,\ u, v \in U(\Omega)\}$$

cada elemento de $\mathcal{L}(\Omega)$ es una función integrable según Lebesgue y se define la integral de $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, mediante:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega u - \int_\Omega v$$

o equivalentemente

Nos enfocamos en los espacios $L^p(\Omega)$.

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \le p < \infty$, definimos el espacio $\mathcal{L}^p(\Omega)$ de funciones medibles $u$, definidas en $\Omega$ tales que $|u| \in \mathcal{L}(\Omega)$, es decir:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / u \text{ es medible y } |u|^p \in \mathcal{L}(\Omega)\}$$

Que es un espacio vectorial, con las operaciones usuales de funciones.

Definimos el funcional

$$\begin{array}{rccl} |\cdot|_{\mathcal{L}^p}: & \mathcal{L}^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & |u|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} \end{array}$$

que es una seminorma, pues

$$|u|_{\mathcal{L}^p} = 0 \Rightarrow \int_\Omega |u|^p\,dx = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega$$

Por lo que $(\mathcal{L}^p(\Omega), |\cdot|_{\mathcal{L}^p})$ no es un espacio normado.

Para arreglar esta situación, definimos una relación "$\sim$" en $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $u \sim v \Leftrightarrow u = v$ c.t.p. en $\Omega$. Resulta que $\sim$ es una relación e equivalencia.

Así tenemos el espacio cociente:

$$L^p(\Omega) \equiv \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim} = \{[u]/u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$$

Que es un espacio vectorial con las operaciones usuales de clases. Definimos un funcional

$$\begin{array}{rccl} |\cdot|_{L^p}: & \mathcal{L}^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [u] & \longmapsto & |[u]|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} \end{array}$$

*i)* $|\cdot|_{L^p}$ está bien definida.

Sean $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$, $u_1 \neq u_2$ tal que:

$$\begin{aligned} [u_1] = [u_2] &\Rightarrow u_1 = u_2 \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow |u_1| = |u_2| \ \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow |u_1(x)| = |u_2(x)| \ , \ \forall x \in \Omega \setminus A \ , \ \text{donde } m(A) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\int_{\Omega\setminus A} |u_1(x)|^p\,dx\right) = \left(\int_{\Omega\setminus A} |u_2(x)|^p\,dx\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sabemos que: $\displaystyle\int_A |u_1(x)|^p\,dx = 0$ y $\displaystyle\int_A |u_2(x)|^p\,dx = 0$.

Así tenemos

$$\int_\Omega |u_1(x)|^p\,dx = \int_{\Omega\setminus A} |u_1(x)|^p\,dx \quad \wedge \quad \int_\Omega |u_2(x)|^p\,dx = \int_{\Omega\setminus A} |u_2(x)|^p\,dx \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) tendremos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_1(x)|^p\,dx = \int_\Omega |u_2(x)|^p\,dx &\Rightarrow \left(\int_\Omega |u_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |u_2(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\ &\Rightarrow |[u_1]| = |[u_2]| \end{aligned}$$

*ii)* También si $|[u]|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow [u] = [0]$.

Veamos:

($\Leftarrow$) Como $[u] = [0]$ se sigue

$$\begin{aligned} u \sim 0 &\Rightarrow u = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow |u|^p = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow |u|^p = 0\ ,\ \forall x \in \Omega \setminus M\ ,\ \text{ donde } m(M) = 0 \\ &\Rightarrow \int_{\Omega \setminus M} |u|^p\, dx = 0 \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_M |u|^p\, dx = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p\, dx = \int_{\Omega\setminus M} |u|^p\, dx + \int_M |u|^p\, dx = 0 + 0 &\Rightarrow \int_\Omega |u|^p\, dx = 0 \\ &\Rightarrow \left( \int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{1/p} = 0 \\ &\Rightarrow |[u]|_{L^p} = 0 \end{aligned}$$

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} |[u]|_{L^p} = 0 &\Rightarrow \left( \int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{1/p} = 0 \\ &\Rightarrow \int_\Omega |u|^p\, dx = 0 \\ &\Rightarrow |u|^p = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow |u| = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow u = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\ &\Rightarrow u \sim 0 \\ &\Rightarrow [u] = [0] \end{aligned}$$

Así se puede probar que $(L^p, |\cdot|_{L^p})$ es un espacio normado.

**Definición 2.2.4.** Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / u \text{ es medible y } \int_\Omega |u|^p\, dx < \infty \right\}$$

**Teorema 2.2.5. (Desigualdad de Hölder).**

*Sean $\Omega$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f.g \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |f.g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

***Prueba***. Ver toerema IV.6 en Brézis (1984) pág. 56. ■

**Teorema 2.2.6.** *$L^p(\Omega)$ es un espacio normado cuya norma se denota con:*

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

***Prueba***. Ver Brézis (1984) pág. 57. ■

**Teorema 2.2.7.** *$L^p$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

***Prueba***. Ver toerema IV.8 en Brézis (1984) pág. 57. ■

**Teorema 2.2.8.** *Sean $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que*

*a)* $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ *para c.t.p. en* $\Omega$.

*b)* $|f_{n_k}| \leq h(x)$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y para c.t.p. en* $\Omega$, *con* $h \in L^p(\Omega)$.

***Prueba***. Ver teorema IV.9 en Brézis (1984) pág. 58. ■

### 2.2.2. Espacio de las Funciones de Prueba y Distribuciones

En primer lugar introduciremos algunas notaciones para derivadas parciales y multi-índices.

**Notación para la derivada parcial de orden superior.**

Sea $n \in \mathbb{N}$, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $\alpha$ se llama multi-índice. El orden de $\alpha$ es

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Sea $\Omega$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ multi-índice.

Si $\alpha \neq (0, 0, \ldots, 0)$, se denota por $D^\alpha\varphi$ a la derivada parcial de orden $|\alpha|$ de $\varphi$ y cuando esta existe, se define como

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El soporte de $\varphi$ :, denotado por *supp*$\varphi$, es la clausura en $\Omega$ del conjunto

$$\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$$

es decir *supp*$\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$.

Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$, el conjunto de las funciones $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, cuyas derivadas parciales de todas las ordenes son continuas y cuyo soporte es un conjunto compacto de $\Omega$. Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados funciones de prueba. Esto es

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/\varphi \text{ es continuamente diferenciable y } supp\varphi \text{ es compacto } \subseteq \Omega\}$$

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y de multiplicación por escalar.

**Noción de convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$**

**Definición 2.2.9.** Sean $(\varphi_n)$ una sucesión en $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Decimos que $\varphi_n \to \varphi$ si:

*i)* Existe $K \subset \Omega$, $K$ compacto, tal que $supp\varphi_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

*ii)* Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en $\Omega$.

**Definición 2.2.10.** El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida arriba es denotado por $D(\Omega)$ y es llamado el espacio de las funciones de prueba.

**Definición 2.2.11.** Una distribución sobre $\Omega$ es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continuo en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre $\Omega$ es denotado por $D'(\Omega)$.

De este modo,

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R}/T \text{ es lineal y continuo}\}$$

Observamos que $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Si $T \in D'(\Omega)$ y $\varphi \in D(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ al valor de $T$ aplicado al elemento $\varphi$.

**Noción de convergencia en $D'(\Omega)$**

**Definición 2.2.12.** Decimos que $T_n \to T$ en $D'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in D(\Omega)$.

### 2.2.3. Espacios de Sobolev

Ahora veamos conceptos básicos sobre los espacios de Sobolev, denotados por $W^{m,p}(\Omega)$, estos son otro ejemplo de espacios de Hilbert, que se utilizan muy a menudo en el marco de las ecuaciones en derivadas parciales definidas sobre un cierto dominio $\Omega$. Los espacios de Sobolev generalizan los espacios $L^p$.

**Definición 2.2.13.** Sea $\Omega$ abierto de $\mathbb{R}^n$, se representa por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que para $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ ,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

donde $1 \leq p \leq \infty$.

Para $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se define la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} \quad , \ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \operatorname{supess} |D^\alpha u(x)|$$

Cuando $p = 2$ estos espacios son denotados por $H^m(\Omega)$, es decir,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

El espacio $H^m(\Omega)$ tiene un producto interno natural definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

y $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

**Teorema 2.2.14.** *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

***Prueba***. Ver Brézis (1984), Kesavan (1989). ∎

**Teorema 2.2.15.** *Sea $\Omega$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\geq 1$ un entero y $1 \leq p \leq \infty$, se tiene*

*a) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $1 < p < \infty$.*

*b) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $1 < p < \infty$.*

*c) $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert (por lo tanto reflexivo) y separable.*

***Prueba***. Ver Brézis (1984), Kesavan (1989). ∎

**Definición 2.2.16.** Sean $m \geq 1$ un entero y $1 \leq p \leq +\infty$. Definamos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la cerradura que $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

en el caso particular si $p = 2$ usaremos la notación

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

**Teorema 2.2.17. (Teorema de Poincaré).**

*Sea $p \geq 1$, $\Omega$ acotado, entonces existe una constante $c$ dependiendo de $\Omega$, $n$ y $p$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ ,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

***Prueba***. Veamos los dos posibles casos:

1) Sea $\Omega = (-a,a)^n$, $a > 0$ y $u \in D(\Omega)$, si $x = (x', x_n)$, donde $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ tenemos

$$u(x', x_n) - u(x', -a) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$

Como $u(x', -a) = 0$ ya que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenemos

$$u(x', x_n) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$

de donde

$$|u(x', x_n)| \leq \int_{-a}^{x_n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right| dt$$

Por la propiedad de Hölder

$$|u(x', x_n)| \leq \left(\int_{-a}^{x_n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_{-a}^{x_n} 1^q dt\right)^{1/q}$$

$$|u(x)|^p \leq |x_n + a|^{p/q} \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt$$

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx' \leq (2a)^{p/q} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt$$

integrando obtenemos

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt$$

de manera similar se tiene para las otras coordenadas

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

de donde obtenemos

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \leq \frac{(2a)^{\frac{p}{q}+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

por lo tanto

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c(\Omega, n, p)\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

2) Si $\Omega$ es un acotado cualquiera en $\mathbb{R}^n$, por análisis real existe $\tilde{\Omega} = (-a, a)^n$, con $a > 0$, que lo contiene y extendiendo con cero a $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es decir

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , \text{ si } x \in \Omega \\ 0 & , \text{ si } x \in \tilde{\Omega} - \Omega \end{cases}$$

y aplicando a $\tilde{u} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ el caso (1) que es válido para $\tilde{\Omega}$ obtenemos la igualdad buscada. ■

**OBS 2.1.**

1. En particular como consecuencia de la desigualdad de Poincaré la expresión

$$\|u\| = \left( \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} = \|\nabla u\|_p$$

define una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma sobre $W^{1,p}(\Omega)$, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotada.

En efecto, de la definición tenemos

$$\|u\| \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ , \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.3}$$

$$\left\|W^{1,p}(\Omega)\right\| = \|u\|_{1,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{1/p}$$

entonces

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq c_1(\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)$$

de aquí obtenemos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \, \|u\| \tag{2.4}$$

de (2.3) y (2.4) se tiene la equivalencia de las normas.

2. En particular, sobre $H_0^1(\Omega)$ el producto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$$

determina una norma $\|u\|$ equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

**Teorema 2.2.18. (Teorema del trazo).**

*Suponga que $\Omega$ es acotado y $\partial\Omega$ es de $C^1$. Entonces existe un operador lineal y acotado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

*tal que*

*i)* $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

*ii)* $\|Tu\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

*Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con la constante $c$ dependiendo solo de $p$ y $\Omega$.*

*Al operador $Tu$ se le llama el trazo de $u$ sobre $\partial\Omega$*

***Prueba.*** Ver Teorema 1 en Evans (2010) pág. 258. ■

**Teorema 2.2.19. (Núcleo del operador traza).**

*Suponga que $\Omega$ es un conjunto acotado y $\partial\Omega$ es $C^1$. Además supongamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ si y solo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

***Prueba.*** Ver Teorema 2 en Evans (2010) pág. 259. ■

Enunciamos algunos teoremas del análisis real.

### 2.2.4. Métodos Variacionales

Muchas leyes de física y otras disciplinas científicas abarcan varios fenómenos que pueden ser modelados mediante una ecuación diferencial parcial. Los métodos variacionales representan una herramienta adecuada para estudiar dichos modelos.

Ahora introducimos algunas ideas que motivan la formulación variacional de un problema.

Suponiendo que deseamos resolver una ecuación diferencial parcial, la cual por simplicidad escribiremos en la forma

$$A(u) = 0 \tag{2.5}$$

donde $A(\cdot)$ denota un operador diferencial parcial posiblemente no lineal, $u$ es la función incógnita y que fuera expresar $A(\cdot)$ como la derivada de un funcional apropiado de "energía" $I[\cdot]$, esto es:

$$0 = A(\cdot) = I'[\cdot] \tag{2.6}$$

El problema (2.5) se convierte en

$$I'[u] = 0 \tag{2.7}$$

En este caso diremos que el problema (2.5) es variacional.

La ventaja de esta nueva formulación es que las soluciones de (2.5) son los puntos críticos de $I[\cdot]$. Esto en algunas circunstancias es fácil de encontrar. Por ejemplo: el funcional $I[\cdot]$ tiene un mínimo en $u$, luego probablemente (2.7) es válido y luego $u$ es solución de la EDP (2.5).

Usualmente es difícil resolver (2.5) directamente, por lo que una forma de facilitar la resolución es hallando un mínimo, máximo u otros puntos críticos del funcional $I[\cdot]$.

### A. Soluciones débiles

Para clasificar el estudio que realizaremos respecto al problema $(P)$, primero estudiaremos el concepto de solución débil.

Por la teoría de EDP , para $f$ "suficientemente regular" existe $u \in C'(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface puntualmente la primera fila del problema $(P)$. Con la finalidad de poder abordar exitosamente una mayor cantidad de modelos físicos introducimos el concepto de solución débil.

**Definición: (Solución débil)**

Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución débil del problema $(P)$ si:

*i)* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

*ii)* $[M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$

### B. Derivadas de Fréchet y Gateaux

**Definición 2.2.20. (Derivada de Fréchet).**

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, $U$ un conjunto abierto en $X$. Una aplicación $J : U \longrightarrow Y$ es diferenciable según Fréchet o $F$-diferenciable en $u_0 \in U$ si existe un operador lineal $A_{u_0} \in L(X,Y)$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|J(u_0 + h) - J(u_0) - A_{u_0}(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

En este caso denotamos

$$J'(u_0) = J'_F(u_0) = A_{u_0}$$

llamada derivada de Fréchet de $J$ en $u_0$.

**OBS 2.2.**

*i)* $J'(u_0)$ es única.

*ii)* Si $J : U \longrightarrow Y$ es $F$-diferenciable en cada punto $u_0 \in U$, diremos simplemente que $J$ es $F$-diferenciable.

**Definición 2.2.21.** Sea $J : U \subset X \longrightarrow Y$, $F$-diferenciable en $U$, la derivada (según Fréchet) de $J$ en $U$ es la aplicación

$$\begin{array}{rccl} J'_F: & U \subseteq X & \longrightarrow & L(X,Y) \\ & a & \longrightarrow & J'_F(u) : X \longrightarrow Y \end{array}$$

Si $J'_F$ es continua en $U$, diremos que $J \in C'(U,Y)$.

**OBS 2.3.** En el desarrollo del presente trabajo, vamos a considerar el caso en que $Y = \mathbb{R}$.

Así $J : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional dado $u_0 \in U$, $J$ es $F$-diferenciable en $u_0$ si existe $A_{u_0} \in X'$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(u_0 + h) - J(u_0) - \langle Au_0, h\rangle}{|h|} = 0$$

y

$$\begin{array}{rcclccl} J'_F: & U \subseteq X & \longrightarrow & X' & & & \\ & u & \longrightarrow & J'_F(u): & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & v & \longrightarrow & \langle J'_F(u), v\rangle \end{array}$$

**Propiedades:** Sean $I$, $J : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$, $F$-diferenciable en $u_0 \in U \subseteq X$, donde $U$ es un abierto en $X$. Entonces valen las siguientes propiedades:

1) $\alpha I + \beta J$ es $F$-diferenciable en $u_0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y

$$(\alpha I + \beta J)'(u_0) = \alpha I'(u_0) + \beta J'(u_0)$$

2) $I.J$ es $F$-diferenciable en $u_0$ y

$$(I.J)'(u_0) = I(u_0)J'(u_0) + I'(u_0)J(u_0)$$

Ver (Badiale and Serra, 2011, p. 13), proposición 1.3.6.

**Teorema 2.2.22. (Regla de la cadena).**

*Dados $X$, $Y$, $Z$ espacios de Banach, $I : U_{(u_0)} \subseteq X \longrightarrow Y$, $(u_0, v_0)$ fijo donde $v_0 = I(u_0)$ y $J : V_{(v_0)} \subseteq Y \longrightarrow Z$ con $I(U_{(u_0)}) \subseteq V_{(v_0)}$ donde $U_{(u_0)}$ y $V_{(v_0)}$ son vecindades de $x_0$ e $y_0$ respectivamente. Se define la composición $J \circ I : U_{(u_0)} \longrightarrow Z$.*

*Supongamos que $I'(u_0)$ y $J'(I(u_0))$ existen como $F$-diferenciables. Entonces la función composición $H = J \circ I$ es $F$-diferenciable en $u_0$ y se tiene que*

$$H'(u_0) = J'(I(u_0)) \circ I'(u_0)$$

***Prueba.*** Ver (Zeidler, 1985, p. 138), proposición 4.10. ■

**Definición 2.2.23.** Sea $U \subseteq X$ abierto y $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la derivada según Fréchet $J' : U \longrightarrow X'$ es continua, diremos que $J \in C'(U)$.

**Teorema 2.2.24.** *Si $J$ es derivable según Fréchet en $u_0$ entonces $J$ es continua en $u_0$.*

***Prueba***. Ver (Zeidler, 1985, p. 137), proposición 4.8. ■

**Definición 2.2.25. (Derivada de Gateaux).**

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $U$ un conjunto abierto en $X$. Una aplicación $J : U \longrightarrow Y$ es diferenciable según Gateaux o $G$-diferenciable en el punto $u_0 \in U$ si existe un operador $A_{u_0} \in L(X, Y)$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{J(u_0 + tv) - J(u_0)}{t} - A_{u_0}(v) \right\|_Y = 0 \ , \ \forall v \in X.$$

Luego se define la aplicación derivada de Gateaux en $u_0$ que denotaremos como $A_{u_0} = J'_G(u_0) = D_G J(u_0)$, donde

$$\begin{array}{rccl} J'_G(u_0): & X & \longrightarrow & Y \\ & v & \longrightarrow & J'_G(v) = \langle J'_G(u_0), v\rangle \end{array}$$

En particular la aplicación derivada de Gateaux de $J$ en $U$

$$\begin{array}{rccl} J'_G: & U \subseteq X & \longrightarrow & L(X, Y) \\ & u & \longrightarrow & J'_G(u) = A_u \end{array}$$

**Teorema 2.2.26.** *Sea $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivada de Gateaux continua en $U$ abierto en $X$. Entonces $J$ es diferenciable según Fréchet en $U$ y las derivadas según Fréchet y Gateaux coinciden. De esto resulta que $J \in C'(U)$.*

***Prueba***. Ver (Zeidler, 1985, p. 137), proposición 4.8. ■

**Definición 2.2.27.** Sea $X$ un espacio de Banach y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase $C'(X, \mathbb{R})$ sobre $X$. Se dice que $u \in X$es un punto crítico de $J$ si $J'(u) \equiv 0$, es decir, $\langle J'(u), v\rangle = 0$, para todo $v \in X$.

**Definición 2.2.28.** Sea $X$ un espacio normado y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Decimos que $J$ tiene un mínimo local (máximo local) en $u_0 \in X$ si existe una vecindad (abierta) $U \subseteq X$ tal que $J(u_0) \leq J(u), \forall u \in U \backslash \{u_0\}$ (respectivamente $J(u_0) \geq J(u)$, $\forall u \in U \setminus \{u_0\}$).

Si $J$ tiene un mínimo local o máximo local en $u_0$, decimos que $J$ tiene un extremo local en $u_0$.

**Definición 2.2.29.** Sea $X$ un espacio de Banach y $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase $C'(X, \mathbb{R})$. Decimos que una sucesión $(u_\nu) \subseteq X$, es una sucesión de Palais-Smale (P.S.) para el funcional $\phi$ si:

$$\|\phi_\nu\| \leq c \ , \ \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{y} \ \|\phi'(u_\nu)\| \longrightarrow 0 \text{ en } X'$$

**Definición 2.2.30.** Si cada sucesión de (P.S.) de $\phi$ tiene una sucesión fuertemente convergente. Entonces se dice que $\phi$ satisface la condición de P.S.

**Lema 2.2.31. (Teorema del paso de la montaña).**

*Sea $X$ un espacio de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ con $I(0) = 0$. Suponga que:*

$(H_1)$ *Existen $\alpha, r > 0$ tal que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ con $\|u\| = r$.*

$(H_2)$ *Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $I(e) < 0$.*

*Entonces existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que*

$$I(u_n) \to c \text{ y } I'(u_n) \to 0 \text{ en } X'$$

*donde*

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

*y*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \,:\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

***Prueba***. Ver (Willem, 1996, p. 12). ■

## 2.3. Marco Conceptual

Dentro de las ecuaciones diferenciales parciales que no pueden ser resueltas explícitamente, existen métodos que buscan demostrar que por lo menos exista una solución sujeta a ciertas características que dependen de la naturaleza del problema. En esta investigación demostraremos que dicha solución existe y que es positiva.

Articularemos los conceptos que nos permitan encaminar nuestra tesis.

*a)* Dadas las condiciones del problema, en el sentido débil, los espacios más adecuados para analizar nuestra ecuación serán los espacios de Sobolev.

*b)* Plantearemos un nuevo problema con las mismas características del problema $(P)$.

*c)* Emplearemos un teorema que tiene características del teorema del paso de la montaña, para obtener una sucesión del Palais-Smale.

*d)* Mediante un lema que se rige a ciertas condiciones del problema, el cual demostraremos en este trabajo, podremos ver que una sucesión acotada de Palais-Smale posee una subsucesión convergente y en consecuencia obtendríamos una solución para el problema.

*e)* Finalmente usaremos una función de prueba $u^-$, la condición (1.1) del problema y el principio del máximo para obtener que dicha solución es positiva.

## 2.4. Definición de Términos Básicos

### 2.4.1. El Espacio Dual

**Definición 2.4.1.** Un *funcional* sobre un espacio vectorial $E$ es una función real $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre $E$.

Sea $E$ un espacio normado, se denota por $E'$ el *espacio dual* de $E$ y se define por

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es funcional lineal y continuo sobre } E\}$$

La norma sobre el dual $E'$ se define por

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|}$$

para todo $f \in E'$, donde $\langle f, x\rangle$ denota $f(x)$.

El espacio $E'$ con la norma $\|\cdot\|_{E'}$ es un espacio de Banach (aún cuando $E$ no lo es). La norma $\|\cdot\|_{E'}$ se llama *norma dual* de $E$.

### 2.4.2. Espacios Reflexivos

Sea $E$ un espacio de Banach y sea $E'$ su dual dotado de la norma dual

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| .$$

Sea $E'' = (E')'$ su bidual dotado de la norma

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E'\\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle| .$$

Sea $x \in E$ fijo, la aplicación $f \longrightarrow \langle f, x\rangle$ de $E'$ en $\mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo sobre $E'$, es decir, un elemento de $E''$.

Se establece la *inyección canónica* $J : E \longrightarrow E''$ como sigue: Para cada $x \in E$ fijo, se define $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \ , \ \forall f \in E'$$

Así pues,

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \ , \ \forall x \in E \ , \ \forall f \in E'.$$

$J$ tiene las siguientes propiedades:

*i)* $J$ es lineal y

*ii)* $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

**Definición 2.4.2.** Sea $E$ un espacio de Banach y $J$ la inyección canónica de $E$ en $E''$. Se dice que $E$ es un *espacio reflexivo* si $J(E) = E''$.

### 2.4.3. Convergencia Débil

Sea $E$ un espacio de Banach y sea $f \in E'$ designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ a la aplicación dada por $T_f = \langle f, x\rangle$, donde la notación $\langle f, x\rangle$ indica la funcional $f$ calculado en $x$. Aquí $E'$ es el dual de $E$ dado por $E' = \{f : E \to \mathbb{K}/f$ es lineal y continua$\}$, provisto de la norma $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ y $E''$ bidual provisto de la norma $\|\xi\| = \sup\limits_{f\in E';\|f\|\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|$.

Si $E$ es un espacio normado, se dice que $x_n \to x$ fuerte en $E$ si $\|x_n - x\|_E \to 0$.

Dada una sucesión $(x_n)$ en $E$, $E$ es un espacio normado, diremos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge débilmente a $x$ (en $E$), denotado por $x_n \rightharpoonup x$, si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in E'$.

# III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

## 3.1. Hipótesis

### Hipótesis General

Los métodos variacionales pueden demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff.

### Hipótesis Específicas

- La ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff puede caracterizarse mediante el espacio de fase débil.
- La ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff admite condiciones adecuadas sobre las fuerzas internas $f$ y el operador $M$ de Kirchhoff y así posee soluciones débiles positivas.

### 3.1.1. Operacionalización de variables

**• Definición conceptual de variables**

**Variable dependiente (D)**

Ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff

**Variable independiente (I)**

Métodos variacionales

| Variable | Dimensiones | Indicadores | Método | Técnica |
|---|---|---|---|---|
| D | Ecuación de $P$-Kirchhoff.<br><br>Operador $P$-Laplaciano | Operador $M$ de kirchhoff.<br><br>Deformaciones no lineales sobre el cuerpo. | Método de escritorio o de biblioteca. | Documentos cualitativos.<br><br>Revisión bibliográfica.<br><br>Trabajo con equipos de investigación. |
| I | Método minimax.<br><br>Condición de Ambrosetti.<br><br>Condición de Palais-Smale. | Método del paso de la montaña.<br><br>Valor crítico.<br><br>Funcional de Euler-Lagrange. | Método de escritorio o de biblioteca. | Documentos cualitativos.<br><br>Revisión bibliográfica.<br><br>Trabajo con equipos de investigación. |

# IV. Metodología del Proyecto

## 4.1. Diseño Metodológico

### 4.1.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

### 4.1.2. Diseño de investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos relacionados al modelaje de la ecuación de tipo p-Kirchhoff. Se explicará en detalle la metodología que envuelven los espacios de Sobolev con el fin de mostrar la existencia de soluciones débiles para el problema. Finalmente se aplicarán métodos variacionales sobre el problema, lo cual permitirá demostrar nuestra hipótesis general.

## 4.2. Método de investigación

El método de investigación es básico teórico.

## 4.3. Población y Muestra

No se aplica para este tipo de proyecto.

## 4.4. Lugar

El lugar de estudio fue en el laboratorio de cómputo de la facultad.

## 4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

No aplica para este tipo de proyecto.

## 4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

## 4.7. Aspectos éticos de la investigación

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

## 4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, estudio económico-financiero, estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

## 4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, evaluación del impacto ambiental, medidas ecológicas, plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

# V. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

**CRONOGRAMA DE PROYECTO DE TESIS**

**Proyecto de tesis:** EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES.
**Tesista:** Alexander Manuel Lozano Cerna.
**Fecha de Inicio:** 3/5/2021
**Fecha de término:** 3/11/2022

| ACTIVIDADES | INICIO | FINAL | DUR. (Semanas) | MAYO | | | | JUNIO | | | | JULIO | | | | AGOSTO | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Capacitación Teórica | **3/5/2021** | 23/5/2021 | **3** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Componente 1:** Establecer el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff. | **24/5/2021** | 20/6/2021 | **4** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Componente 2:** Establecer las condiciones adecuadas sobre las fuerzas internas f y el operador M de Kirchhoff para que una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas. | **21/6/2021** | 18/7/2021 | **4** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Análisis y discusión de resultados | **19/7/2021** | 15/8/2021 | **3** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Digitalización y defensa de tesis | **16/8/2021** | **3/11/2022** | **2** | | | | | | | | | | | | | | | | |

**LEYENDA**
Controles y revisiones por asesor
Clases, revisiones y presentaciones de anvance

# VI. PRESUPUESTO

| Especificación | % | Costos $S/.$ |
|---|---|---|
| Textos de especialidad | 20 | 800.00 |
| revistas de especialidad | 15 | 600.00 |
| Dispositivo de almacenamiento | 7.5 | 300.00 |
| Servicios de internet | 2.5 | 100.00 |
| Impresora HP | 20 | 800.00 |
| Artículos de oficina (Hojas bond, USB, etc) | 5 | 200.00 |
| Gastos de transporte | 30 | 1200.00 |
| Total | 100 | 4000.00 |

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R. (1975). *Soblev Spaces.* Academic Press, Inc. London.

Alves, C. O., Correa, F. J. S. A., and Ma, T. F. (2005). *Positive solutions for a quasilenear elliptic equation of Kirchhoff type.* Computers and Mathematics with Applications, 49, 85-93.

Alves, C. O. and Corrêa, F. (2001). *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator, conmunications on applied nonlinear analysis.* 8, N. 2. 43-56.

Badiale, M. and Serra, E. (2011). *Semilinear Elliptic Equations for Beginners.* Springer, London Dordrecht Heidelberg New York.

Browder, A. (1996). *Mathematical Analysis: An Introduction.* Ed. Springer. USA.

Brézis, H. (1984). *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial, S.A., Madrid.

Cavalcanti, M. M. (2009). *Introdução a teoria das distribuções e aos Espaços de Sobolev.* Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá.

Chabrowski, J. and Yang, J. (1997). *Existence theorems for elliptic equations involving super critical sobolev exponents.* adv. Differential Equations 2.

Corrêa, F. J. S. and Menezes, S. D. B. (2004). *Existence of Solutions to Nonlocal and Singular Elliptic Problems Via Galerkin Method.* Electronic Journal of Differential Equations.

Corrêa, F. J. S. A. and Figueiredo, G. M. (2006). *On the Existence of Positive Solution for an Elliptic Equation of Kirchhooff Type via Moser Iteration Method.* Boundary Value Problems (1).

Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics vol. 14. Providence, RI: American Mathematics Society. Oxford University Press.

Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.

Kesavan, S. (1989). *Topics in Functional Analysis and Aplications.* Wiley Eastern Limited.

Kirchhoff, G. (1883). *Mechanik.* Teubner, Leipzig.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons.

Li, M. and Tsai, L. (2003). *Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations.* Nonlinear Analysis, 54, 1397-1415.

Limaco, J. and Medeiros, L. (1999). *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncilyndrical domains.* Portugaliae Mathematica, Vol. 14.N.04. 464-500.

Lions, J. L. (1969). *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, París.

Munkres, J. R. (2002). *Topología.* PRETINCE HALL.

Royden, H. L. (1988). *Real Analysis.* The Macmillan Company.

Vega, C. C. (2004). *Álgebra Lineal.* MOSHERA S.R.L., Lima - Perú.

Wheeden, R. and Zygmund, A. (1977). *Measure and Integral. An introduction to Real Analysis.* Marcel Dekker, Inc.

Willem, M. (1996). *Minimax theorems.* Birkhäuser, Boston, MA.

Yosida, K. (1980). *Functional Analysis.* Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag. New York/Berlin. Papers y Artículos.

Zeidler, E. (1985). *Nonlinear Functional Analysis and its appliacations. Vol 1. Fixed-Point Theorems.* Springer-Verlag.

# VIII. ANEXOS

## MATRIZ DE CONSISTENCIA

| FORMULACIÓN DEL PROBLEMA | OBJETIVOS | HIPÓTESIS | METODOLOGÍA | POBLACIÓN |
|---|---|---|---|---|
| **Problema general:**<br>¿De qué forma se puede demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff? | **Objetivo general:**<br>Demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff mediante los métodos variacionales. | **Hipótesis general:**<br>Los métodos variacionales pueden demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff. | El método de investigación es básico teórico. | No se aplica para este tipo de proyecto. |
| **Problemas específicos:**<br>1. ¿Cuál debería ser el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff?<br>2. ¿Qué condiciones debe establecer q las fuerzas internas $f$ y el operador $M$ de Kirchhoff, para que una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas? | **Objetivos específicos:**<br>1. Establecer el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff.<br>2. Establecer las condiciones sobre las fuerzas internas $f$ y el operador $M$ de Kirchhoff para que una ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas. | **Hipótesis especificas:**<br>• La ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff puede caracterizarse mediante el espacio de fase débil.<br>• La ecuación elíptica de tipo $P$-Kirchhoff admite condiciones adecuadas sobre las fuerzas internas $f$ y el operador $M$ de Kirchhoff y así posee soluciones débiles positivas. | | |